

Jewish Geometry
Adam Simon Levine
NHC Summer Institute 2018

Part I: The Diameter, Circumference, and Area of a Circle

1. Mishneh Torah, Hilchot Kiddush haChodesh 17:24 (R. Moses Maimonides / Rambam, 1135–1204)

טעם כל אלו החשבונות ומפני מה מוסיפים מנין זה ומפני מה גורעין, והיאך נודע כל דבר ודבר מאלו הדברים, והראיה על כל דבר ודבר, היא חכמת התקופות והגימטריות שחברו בה חכמי יון ספרים הרבה והם הנמצאים עכשיו ביד החכמים, אבל הספרים שחברו חכמי ישראל שהיו בימי הנביאים מבני יששכר לא הגיעו אלינו, ומאחר שכל אלו הדברים בראיות ברורות הם שאין בהם דופי ואי אפשר לאדם להרהר אחריהם, אין חוששין למחבר בין שחברו אותו נביאים בין שחברו אותם גוים, שכל דבר שנתגלה טעמו ונודעה אמתו בראיות שאין בהם דופי אין סומכין על זה האיש שאמרו או שלמדו אלא על הראייה שנתגלתה והטעם שנודע.

The reason behind all of these computations – why we add this number or subtract that one, and how each fact is known, and the proof of each fact – this is the science of astronomy and mathematics (*gematria*), about which the Greek scholars wrote many books that are available to scholars today, while the books written by the scholars of Israel in the days of the Prophets, the children of Issachar, have not survived for us. But since all of these facts have clear and flawless proofs, which a person cannot possibly doubt, we do not care whether they were written down by the Prophets or the gentiles. If a statement comes from clear reasoning and a flawless proof, we do not concern ourselves with who said it but only with the reasoning and the proof.

2. I Kings 7:23-26

וַיַּעַשׂ אֶת־הַיָּם מוֹצֵק עֶשֶׂר בָּאַמָּה מִשְׁפָּתוֹ עַד־שְׁפָתוֹ עָגֹל סָבִיב סָבִיב וְחָמֵשׁ בָּאַמָּה קוֹמָתוֹ וְקוּהוּ [וְקוּ] שְׁלֹשִׁים בָּאַמָּה יָסֹב אָתוֹ סָבִיב: וּפְקָעִים מִתַּחַת לְשְׁפָתוֹ סָבִיב סָבִיבִים אֹתוֹ עֶשֶׂר בָּאַמָּה מִקְפֵּי אֶת־הַיָּם סָבִיב שְׁנֵי טוּרִים הַפְּקָעִים יְצָקִים בִּיצָקָתוֹ: עֵמֶד עַל־שְׁנֵי עֶשֶׂר בְּקָר שְׁלֹשָׁה פְּנִים צְפוֹנָה וְשְׁלֹשָׁה פְּנִים יָמָה וְשְׁלֹשָׁה פְּנִים מְזֻרְחָה וְהָיָה עֲלֵיהֶם מִלְּמַעְלָה וְכָל־אֲחֵרֵיהֶם בְּיָתָהּ: וְעָבְיוּ טַפַּח וְשְׁפָתוֹ כְּמַעֲשֵׂה שְׁפַת־כּוֹס פָּרַח שׁוֹשֵׁן אֶלְפִים בֵּת יָכִיל:

²³Then he made the molten sea, ten cubits from brim to brim, completely round. Its height was 5 cubits, and a line of 30 cubits went around it. ²⁴There were gourds below the brim, completely encircling it—ten to the cubit, encircling the sea; the gourds were in two rows, cast in one piece with it. ²⁵It stood upon twelve oxen: three facing north, three facing west, three facing south, and three facing east, with the tank resting upon them; their haunches were all turned inward. ²⁶Its thickness was a handbreadth, and its brim was made like the brim of the cup of a lily; it contained 2000 *bat*.

3. Commentary of R. Levi b. Gershon (1288–1344), I Kings 7:23

הוא על דרך קירוב כי ההיקף בעגול הוא מוסיף על שלשה בשעור בקוטר כמו שביעית הקוטר בקירוב מעט. ואם אמרנו שמדת הקו הסובב היא לקוחה בחלל הים הנה יהיה יותר קרוב אל האמת אך יהיה בו קירוב מעט. כי עביו היה טפח ולזה היה קטר חללו עשר אמות פחות שלישית אמה ויהיה הקיפו בקירוב יותר על שלשים אמה אמה ושלישית אמה:

This is an approximation, for the circumference of a circle is greater than three times the diameter by approximately a seventh of the diameter. And if we say that the measurement of the circumference was taken on the inside of the basin, this is closer to the truth, but still just a close approximation. The thickness is a handbreadth, so the inner diameter is ten cubits less a third, and the inner circumference is closer to $31 \frac{1}{3}$ cubits.

4. Mishnat haMidot 5:3–4 (Rabbinic text on geometry, ca. 150 CE?)

השפלה איזו היא? זו הנתונה על הארץ כשדה עגולה. הצריך למוד מצרף החוט בתוך עצמו ומשליך ממנו שביעי, והנשאר הוא המשיחה, הוא גגה. ואם אתה חפץ לידע את הסיבוב חלילה חלילה, הוא מצרף את את החוט בתוך ג' ושביעי ועולה כ"ב. ואם אתה חפץ לשער את המשיחה, אחוז חצי המשיחה, שהיא י"א, וצרף אותה בחצי החוט, שהוא ג' וחצי, ועולין ל"ח ומחצה, כן בראשונה הן באחרונה. הרי הוא אומר: ויעש את הים מוצק עשר באמה משפתו עד שפתו עגל סביב, [וחמש] באמה קומתו, שנ', וקו שלשים באמה יסב אתו סביב. מה תלמוד וקו שלשים אמה וכו'? לפי שאמרו בני ארץ בעגולה שהסביבה מחזקת שלש פעמים ושבע בחוט, יצא מהם שביע אחד בעביו של ים לשתי שפתות ונותר שם ל' אמה יסוב אותו סביב. ובשיוור הזה [שויים אחד] הימים והמקואות והבורות בארך וברחב ועמק. הא למדת מדת העגולה.

What is the flat one [i.e., the circle]? That is one that is put down [flatly] on the ground like a circular field or a circular figure. If one wants to measure [the area], let him multiply the thread [diameter] into itself and throw away from it the one seventh and the half of a seventh; the rest is the area, its roof. And if you want to know the circumference all around, multiply the thread into 3 and one seventh and it amounts to 22. And if you want to compute the area, take half of the circumference, which is 11, and multiply it into half the thread which is 3 and a half, and it amounts to 38 and a half. It is the same [result] according to the first [method] and the last one.

Now it is written: “And he made the molten sea of ten cubits from brim to brim, round in compass,” and [nonetheless] its [circumference] is thirty cubits, for it is written: “And a line of thirty cubits compassed it round about.” What is the meaning of the verse “and a line of thirty cubits...”? Since the people of the world say that the circumference of a circle contains three times and a seventh of the tread, take off from that one seventh for the thickness of the sea on the two brims, then there remain “thirty cubits compass it round about.” The seas, reservoirs, and cistern are equally [computed] according to this measure in length, breadth, and depth. Thus you have learned the measure of the circular [figure].

5. Mishnah Eiruvין 1:4–5

הקורה שאמר, רחבה כדי לקבל ארס. וארס, חצי לבנה של שלשה טפחים. דיה לקורה שתהא רחבה טפח, כדי לקבל ארס לארכו: רחבה, כדי לקבל ארס, ובריאה, כדי לקבל ארס. רבי יהודה אומר, רחבה אף על פי שאין בריאה: היתה של קש או של קנים, רואין אותה כאלו היא של מתכת. עקמה, רואין אותה כאלו היא פשוטה. עגלה, רואין אותה כאלו היא מרבעת. **פל שיש בהקפו שלשה טפחים, יש בו רחב טפח:**

The cross-beam of which they [the rabbis] spoke must be wide enough to hold an *ariach*, which is half of a brick three handbreadths [wide]. It is sufficient for a beam to be one handbreadth wide in order to hold the width of an *ariach*. [It must be] wide enough to hold an *ariach* and strong enough to support such an *ariach*. R. Judah ruled: [It is valid if it is] wide enough but not strong enough. If it was made of straw or reeds, we view it as though it were made of metal; [if it was] curved we view it as though it were straight; [if it was] round we view it as though it were square. *Whatever has a circumference of three handbreadths has a diameter of one handbreadth.*

6. Babylonian Talmud, Eiruvין 14a

עגולה רואין אותה כאילו היא מרובעת. הא תו למה לי? - סיפא איצטריכא ליה: כל שיש בהיקפו שלשה טפחים יש בו רחב טפח. מנא הני מילי? - אמר רבי יוחנן, אמר קרא: ויעש את הים מוצק עשר באמה משפתו עד שפתו עגל סביב וחמש באמה קומתו וקו שלשים באמה יסב אתו סביב. והא איכא שפתו! - אמר רב פפא: שפתו שפת פרח שושן כתיב ביה, דכתיב: ועביו טפח ושפתו כמעשה כוס פרח שושן אלפים בת יכיל. והאיכא משהו! - כי קא חשיב - מגואי קא חשיב.

“If it is round we view it as if it were square.” Why do I need this? The next part is necessary for it: “*Whatever has a circumference of three handbreadths is one handbreadth in diameter.*” Whence these words? R. Johanan replied: Scripture stated: “And he made the molten sea, ten cubits from brim to brim, completely round. Its height was five cubits, and a line of thirty cubits went around it.” (II Kings 7:23) But what about its brim? R. Papa replied: Its brim was [as thin] as the flower of a lily, as it is written: “It was a handbreadth thick, and its brim thereof was wrought like the brim of a cup, like the flower of a lily; it held two thousand *bat*.” (7:26) But isn’t there a little? — When it was computed, it was that of the inner circumference.

7. Tosafot haRosh, Eiruvין 14a (R. Asher ben Yechiel, Germany/Spain, 1250–1327)

כל שיש בהיקפו שלשה יש בו רחב טפח מנא הני מילי. תמיה לי מה שייך למיבעי הכא מנא הני מילי בדבר הנראה לעינים ואדם יכול לעמוד עליו יביאו דבר שהוא רחב טפח ונמדוד ההיקף, ונ"ל לפרש לפי שאין הדבר מכוון שההיקף הוא יותר מג' טפחים קא בעי תלמודא מה"מ מנין לקחו חכמים ליתן גבול ומדה לדבר אחג אע"פ שאינו מכוון אלא שהדבר קרוב להיות מכוון, ומייתי ראייה דקרא נמי קא עביד הכי דים של שלמה שהיה רחב עשר וקאמר קרא דקו שלשים אמה יסוב אותו אע"פ שהוא ארוך יותר, ופריך תלמודא והא איכא שפתו דהא דקאמר קרא דקו שלשים יסוב אותו מיירי בשפתו ואז ה"ל הקו ארוך הרבה משלשים אמות והיאך יאמר הפסוק דבר שהוא כל כך מופלג, ותו פריך והא איכא משהו אע"פ שהוא כפרח שושן אכתי הוי מיפלג שהוא מחזיק יותר משלשים אמה.

“Whatever has a circumference of three has a diameter of one handbreadth. Whence these words?” I am baffled why it is necessary to ask this question regarding something that is clear to the eyes. A person can get an object that is one handbreadth wide and measure its circumference! It seems to me that it is meant to explain that the measurement is not exact, since the circumference is greater than three handbreadths. So the Talmud asks “Whence these words?” to permit the Sages to give a bound even though it’s not exact, but it’s close to being exact. They bring a proof from Scripture that the Solomon’s sea was the same: it was ten cubits in diameter, yet Scripture says that a line of thirty cubits encircled it, even though it was actually longer. And the Talmud objects, “What about its width?” For when Scripture says that a line of thirty cubits encircled it, it includes the brim, and therefore the line was longer than thirty cubits. And how can the verse say something that’s so contestable? And it further asks “But surely there was something?” Even though it was like a lily, they still object that it was greater than thirty cubits.

8. Rashi to I Kings 7:26

אלפים בת. שלשת אלפים סאים, שהבת שלש סאין, שנאמר: האיפה והבת תכן אחד להם. נמצאו חמשים ומאה מקנה טהרה, הארבעים מאות, מאה מקנאות, והעשרים מאות, חמשים מקנאות. ואף כשתחלק הכל לפי מדה ששערו חכמים אמה על אמה ברום שלש אמות למקנה, תמצאנה כן, שלש אמות מרבעות, מאה מקנאות, ושנים העגלות, חמשים מקנאות, שהמרבע יתר על העגול רביעית. ובדברי הימים כתיב: בתים שלשת אלפים יכיל, ופירשו רבותינו במדת היבש, שהגדש היה שליש בבית הקבול.

2000 bat. This is 6000 *se'ah*, for the *bat* is three *se'ah*, as it says: “The *bat* and the *ephah* shall be the same measure” (Ezekiel 45:11). We find 150 *mikva'ot*: 4000 *se'ah* are 100 *mikva'ot*, and 2000 *se'ah* are 50 *mikva'ot*. And when you divide it all up according to the Sages’ computations (namely 1x1x3 cubits for each *mikva*), you find it is thus: the lower 3 cubits were 10 cubits square, hence 100 *mikva'ot*, and the upper 2 cubits were round, hence 50 *mikva'ot*, since the area of a square is bigger than the area of a circle by a quarter. And in II Chronicles 4:5, it says: “It held 3000 *bat*.” And our Sages explained that it held 3000 *bat* of dry measure, since the heap is one-third the capacity of the vessel.

9. Babylonian Talmud, Sukkah 7b–8b

אמר רבי יוחנן: סוכה העשויה ככבשן, אם יש בהקיפה כדי לישב בה עשרים וארבעה בני אדם - כשרה, ואם לאו - פסולה. כמאן - כרבי, דאמר: כל סוכה שאין בה ארבע אמות על ארבע אמות - פסולה. מכדי, גברא באמתא יתיב, כל שיש בהקיפו שלשה טפחים יש בו רוחב טפה, בתריסר סגי - !הני מילי בעיגולא, אבל בריבועא - בעיא טפי. - מכדי, כמה מרובע יותר על העיגול - רביע, בשיתסר סגי! - הני מילי בעיגול דנפיק מיגו ריבועא, אבל ריבועא דנפיק מגו עיגולא - בעיא טפי, משום מורשא דקרנתא. - מכדי, כל אמתא בריבועא אמתא ותרי חומשא באלכסונא, בשבסר נכי חומשי סגי! - לא דק. - אימור דאמרינן לא דק פורתא, טובא מי אמרינן לא דק? - אמר ליה מר קשישא בריה דרב חסדא לרב אשי: מי סברת גברא באמתא יתיב? תלתא גברי בתרתי אמתא יתבי. - כמה הוו להו - שיתסר, אנו שיבסר נכי חומשא בעינן! - לא דק. - אימור דאמרינן לא דק

לחומרא, לקולא מי אמרינן לא דק? - אמר ליה רב אסי לרב אשי: לעולם גברא באמתא יתיב, ורבי יוחנן מקום גברי לא קחשיב. - כמה הוו להו - תמני סרי, בשיבסר נכי חומשא סגיא! - היינו דלא דק, ולחומרא לא דק. רבנן דקיסרי ואמרי לה דייני דקיסרי אמרי: עיגולא דנפיק מגו ריבועא רבעא ריבועא דנפיק מגו עיגולא פלגא. ולא היא דהא קחזינן דלא הוי כולי האי.

R. Johanan said: If a sukkah was [round] like a furnace, if twenty-four men can sit around its circumference it is valid, and otherwise it is invalid. According to whom is this view? Obviously according to Rabbi, who says that a sukkah which is not four cubits square is invalid.

But consider: A man occupies the space of a cubit, and whatever has a circumference of three handbreadths has a diameter of one handbreadth. Twelve should be enough! — That applies in the case of a circle, but in the case of a square, a greater perimeter is required.

But consider: By how much is a square greater than a circle? By a quarter. Sixteen should be enough! — That applies in the case of a circle inscribed within a square, but a square inscribed within a circle a greater circumference requires more on account of the projection of the corners.

But consider: If the side of a square is a cubit, its diagonal is approximately one and two fifths cubits. Sixteen and four fifths [cubits] should be enough! — [R. Johanan] gave only an approximate figure.

We could say that [R. Johanan] gave an approximate figure when the discrepancy is small, but could we make such an assumption when the discrepancy is big?! — Mar Kashisha the son of R. Hisda said to R. Ashi: Do you think that a man occupies one cubit? [The fact is that] three men occupy two cubits. How much is it [the circumference of the circle]? Sixteen cubits; and we demand here sixteen and four fifths, but [R. Johanan] gave only an approximate figure.

We could say that [R. Johanan] gave an approximate figure only for a stringency, but could we make such an assumption for a leniency?! — R. Assi answered R. Ashi: In truth, a man occupies a cubit-space, but R. Johanan does not include the space occupied by the men. How much is this? Eighteen; and sixteen and four-fifths suffice. Thus he only gave an approximate figure, in the direction of stringency.

The rabbis of Caesarea (some say: the judges of Caesarea) say: A circle inside a square is [less by] quarter, and a square inside [that] circle is [less by] half. But that's not relevant, since it can't be that much.

10. Tashbetz I.165 (R. Shimon ben Tsemah, Spain/Algeria, 1361–1444)

ומה שהבאת ראייה מלשונם בתלמוד שאמרו לחומרא לא דק לא אמרו כן מפני הדקדוק הזה ההנדסי אלא שאפילו לפי עיקריהם החמירו שלא לדקדק. כמ"ש בפ"ק דסכה (ז' ע"ב) גבי סוכה העשוי' ככבשן שאותה סוגיא הולכת על ב' עקרים אלו: כל שיש בהקיפו ג' טפחים יש ברחבו טפה וכל אמתא ברבועא אמתא ותרי חומשי באלכסונא, שהצריך ר' יוחנן שיהיה בהיקפה כדי לישב כ"ד בני אדם לפי סברתו שסובר דכל סוכה שאין בה ד' אמו' על ד' אמו' פסולה. וכשיש בהיקפה כדי לישב בה כ"ד בני אדם וגברא באמתא יתיב ומקום גובריה לא חשיב, הנה יהיה ברחבה ח' אמו' שהרי בהיקפה כ"ד. כשתסלק ב' אמו' מקום גברא מכאן ומקום גברא מכאן,

ישארו ו' אמו' ואין אנו צריכין כי אם ה' אמו' וג' חומשין דכל אמתא ברבועא אמתא ותרי חומשי באלכסונוא.
והחמיר ר' יוחנן להצריך ו' אמו'. זהו העולה מדבריהם שם אע"פ שלא אמרוהו בזה הלשון.

You brought a proof from the language of the Talmud, which says: "He was imprecise for a stringency." They didn't say this because of this geometric precision, but rather even in their essence they were stringent that it wasn't precise. As it says in the first chapter of Sukkah (7b) about a sukkah in the shape of a furnace. That discussion depends on two principles: Whatever has a circumference of three handbreadths has a diameter of one handbreadth, and a square of one cubit has a diagonal of a cubit and two fifths, which requires R. Johanan to say that the circumference of the sukkah must seat 24 people in accordance with his assumption that any sukkah that isn't four cubits by four cubits is impermissible. If the circumference seats 24 people, and a person sits in a cubit, and the people are outside, then the diameter is eight cubits since its circumference is 24. And when you take away two cubits for the person on each side, six cubits are left, and we only need five and three fifths, since a square of one cubit has a diagonal of a cubit and three fifths. And R. Johanan was strict in requiring six cubits. That's the summary of their words, even though they didn't say it in that language.

ואלו היו חוששין חכמים ז"ל לאלו הדקדוקים ההנדסיים כדבריהם והם היו משתדלים לתקן דברי ר' יוחנן כדי שיהיו קרובים אל האמת, היה להם להזכיר זה בכאן ולומר כי אע"פ שלפי העקרין שהנחנו יש בדברי ר' יוחנן שני חומשים עודפים אבל לפי האמת אין בדבריו עודף מורגש. שהרי באמתא ברבועא יש יותר מאמתא ותרי חומשי באלכסונוא וברחב טפה יש היקף יותר מג' טפחים. ובוזה יתקרב דברי ר' יוחנן אל האמת קירוב נפלא שהרי סוכה שיש בהיקפה כ"ד אמו' אין ברחבה כי אם ז' אמו' ושני שלישים בקירוב כשתחסר מזה ב' אמו' מקום גברי ישארו ה' אמו' ושני שלישים, ואלכסון ד' אמו' הוא חמשה אמו' וג' חומשין בקירוב. ויבוא דברי ר' יוחנן מכוונים כדעת ההנדסים כי ג' חומשין בקירוב לתוספת הם יותר מתשעה ושני שלישים בקירוב למגרעת הם פחו' מט"ו. והרי שני חשבונ' שוים ולא הזכירו כן בגמ' עם היותם משתדלי' לתקן דבריו שיהיו קרובים אל האמת. ונראה מזה שלא חששו בשום מקום לזה הדקדוק ההנדסי...

And if the sages were worried about these geometric precisions, as you say, and they were trying to correct the statement of R. Johanan to make it close to the truth, they should have mentioned this here and said that even though, according to the principles that we laid out, there are in R. Johanan's words an extra two fifths, yet in truth there is no noticeable excess. For in a square of one cubit, the diagonal is more than a cubit and two fifths, and a circle one handbreadth in diameter has a circumference of more than three handbreadths. And in this, the words of R. Johanan are amazingly close to the truth. For a sukkah with a circumference of 24 cubits has a diameter of only $7 \frac{2}{3}$ cubits, roughly, and when you take away from this two cubits because of the people, we're left with $5 \frac{2}{3}$ cubits, and the diagonal of a four-cubit square is $5 \frac{3}{5}$ cubits, roughly. And the words of R. Johanan come to be very close to the knowledge of the geometers, for $\frac{3}{5}$ is close to the increase. It's bigger than nine and two thirds, roughly, in the plane. It's smaller than 15. And the two figures are equal, so they didn't mention in the Gemara that they were trying to fix his words to be close to the truth. And it seems that they weren't at all worried about this geometric precision...

יש לנו לומר אחד משני דברים: או שקבלתן כך היתה ללכת ע"פ דרכים אלו ואע"פ שיש בהם קירוב דהא שיעורין הלכה למשה מסיני הם כדאי' בערובין (ד' ע"א) ובסוכה (ה' ע"ב) ובדוכתי אחריתי. ואפ"ל שכך

נאמרה הלכ' למשה מסיני כמ"ש בקדושין (ל"ט ע"א) על ענין אחר והטעם בזה לפי שלא ניתנה התורה למלאכי השרת כמ"ש בברכו' (כ"ה ע"ב) ובקדושין (נ"ד ע"א) על ענינים אחרים ושמא כך נמסרה להם הלכה שיתנהגו על עיקרים אלו אע"פ שיש בהם קירוב כאלו הם מדוקדקים. ויש סמך בזה מים שעשה שלמה שהלך בו הכתוב על דרך קירוב כמו שביארתי. זהו אחד משני דברי' שאפשר לומר בזה. או שנאמר שהם כשנשא ונתנו בזה על עיקרים אלו עשו זה לקרב ההבנה אל התלמידים לפי שלעולם ישנ' אדם לתלמידו בדרך קצרה כדאיא בפ"ק דפסחים (ג' ע"ב) ובפרק אלו טרפות (ס"ג ע"ב) אבל לענין מעשה יש לנו לדקדק הענין ע"פ הדקדוק האמתי. ומסרוהו לחכמים יודעי השיעורי'. נמצא כי ההלכה מסור' לתלמידים המתחילים והמעשה מסור אל החכמים לדקדקו על פי האמת. וזה הדרך ישר בעיני לתקון דבריהם ז"ל.

We could say one of two things: One, this could just be the Sages' received tradition, to work in this manner. And even though it's an approximation, these measures are *halacha* given to Moses at Sinai. And we could say that this is how *halacha* given to Moses at Sinai is stated. The Torah was not given to the ministering angels! And perhaps the *halacha* transmitted to them was that they should work with these principles, even though they're approximate, as if they were precise. And there is support from this from the sea of Solomon, which Scripture describes with an approximation, as I've explained. This is one explanation. Or one could say that they used these values to instruct students, as it says: "One should always teach one's student in the easiest way" (Pesachim 3b, 63b). But for actual use, we should use the precise, true figure, which was passed to the Sages by those who knew the measures. It seems the *halacha* is taught to beginning students and the actual use is taught to wise ones in order to be precise about the true value. And I think this is the correct way to interpret the Sages' words.

11. Rambam, Commentary on the Mishnah, Eirubin 1:5

צריך אתה לדעת שיחס קוטר העיגול להקפו בלתי ידוע, ואי אפשר לדבר עליו לעולם בדיוק, ואין זה חסרון ידיעה מצדנו כמו שחושבים הסכלים, אלא שדבר זה מצד טבעו בלתי נודע ואין במציאותו שיוודע. אבל אפשר לשער בקירוב, וכבר עשו מומחי המהנדסים בזה חבורים, כלומר לידיעת יחס הקוטר להקיפו בקירוב ואופני ההוכחה עליו. והקירוב שמשתמשים בו אנשי המדע הוא יחס אחד לשלשה ושביעית, שכל עיגול שקוטרו אמה אחת הרי יש בהקיפו שלש אמות ושביעית אמה בקירוב. וכיון שזה לא יושג לגמרי אלא בקירוב תפשו הם בחשבון גדול ואמרו כל שיש בהקיפו שלשה טפחים יש בו רוחב טפח, והסתפקו בזה בכל המדידות שהוצרכו להן בכל התורה.

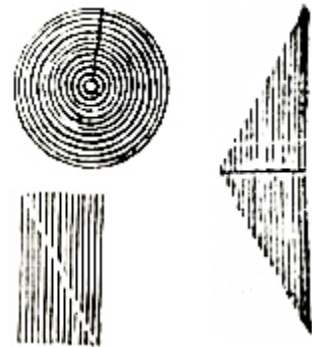
You need to know that the ratio of the circle's diameter to its circumference is not known, and it is never possible to express it precisely. This is not due to a lack in our knowledge, as the fools think, but it is in its nature that it is unknown, and there is no way to know it. But it can be measured approximately, and the geometers have already written essays about this, that is, to know the ratio of the diameter to the circumference approximately, and the proofs for this. The approximation which is accepted by the educated people is the ratio of one to three and one seventh. Every circle whose diameter is one handbreadth, has in its circumference three and one seventh handbreadths approximately. As it will never be perceived but approximately, they took the nearest integer and said that every circle whose circumference is three fists is one fist wide, and they contented themselves with this for their needs in the religious law.

12. Tosafot, Sukkah 8a

כמה מרובע יתר על העגול רביע. אין להוכיח דבר זה מהא דטבלא מרובעת של שלש על שלש וחוט של שתיים עשרה יסוב אותה וטבלא עגולה של שלש חוט של תשע אמות יסוב אותה דכל שיש בהקיפו שלשה טפחים יש בו רחב טפח כדאמר בשמעתין דאין מביאין ראייה מחוט ההיקף הגדול רביע אצל רוחב המקום דאטו טבלא עגולה של ד' על ד' אמות סלקא דעתך שאינה מחזקת אלא כטבלא של ג' על ג' מרובעים לפי שהחוט המקיפו מדתו שוה והלא כשתחלוק טבלא של ג' על ג' מרובע על ג' רצועות לאורך ושלש רצועות לרוחב לא תמצא בה כי אם ט' [של] אמה על אמה וטבלא עגולה של ד' על ד' ע"כ יש בה י"ב רצועות של אמה על אמה שהרי (אם) ריבוע של ד' על ד' כשנחלק לד' רצועות של רחב אמה לארכו וכן לרחבו תמצא בו י"ו רצועות של אמה על אמה ומרובע אינו יתר על העיגול אלא רביע נמצאת אתה אומר שהעגולה היא י"ב אמה על אמה אלא ודאי אין ראייה מחוט של היקף כלל ועוד תדע דרצועה של ה' אמות אורך על רוחב אמה חוט של י"ב אמה מקיפה כשתבא לחלקה לרצועות של אמה על אמה אין בה אלא חמש אמות והיינו טעמא לפי כשאתה מניח חוט בריבוע הולך ומיצר לזוויות וכשאתה מניחו בעגול מרחיב והולך.

“By how much is [the area of] a square bigger than [the area of] a circle? By a quarter.” We cannot prove this principle from the fact that a square of 3 by 3 has a circumference of 12, and a circle of diameter 3 has a circumference of 9 (since whatever has a circumference of three has a diameter of one, as stated in our Gemara). That is, we can't just prove [the area formula] from the fact that the perimeter [of a square] is bigger by a quarter [than the circumference of the inscribed circle]. Do you really think that a round disk of diameter 4 has the same area as a 3x3 square just because their perimeters are the same? If you divide a 3 by 3 square into 3 strips lengthwise, and 3 widthwise, you'll find that it's only 9 square cubits, whereas a round disk of diameter 4 has an area of 12! (For if a square of 4 by 4 is divided into 4 pieces lengthwise and widthwise, it will have 16 square cubits. And a square is bigger than a circle by a quarter, so you see that the circle has an area of 12.) There is really no proof from the circumference at all! Likewise, a strip that is 5 by 1 has a perimeter of 12, and when you divide it into 1 by 1 pieces, its area is only 5. And this is the reason: when you put a thread on a square, it narrows out at the corners, and when you put it on a circle, it spreads out.

ואם באנו לכיון החשבון דמרובע יתר על העגול נוכל להוכיח בענין זה שתעשה נקודה של משהו ותקיפנה בחוטין הרבה סביב זה סיבוב אחר סיבוב עד שירחיבו ויגדל רוחב בעוגל טפח על טפח. ואחר כך תחתך החוטין מן הנקודה ולמטה דהיינו מחצי רוחב עיגול ולמטה ואחר שיחתכו יתפשטו כל החוטין מימין ומשמאל ונמצא כל חוט הולך ומאריך ומחבירו משהו מכאן ומשהו מכאן עד שאתה מגיע לחוט העליון דארכו ג' טפחים שהוא חוט החיצון שהוא מסבב טפח על טפח דכל שיש ברוחבו טפח יש בהיקפו שלשה טפחים. נמצאו החוטין הללו סדורין כענין זה כמין רצועה רחבה באמצע חצי טפח והיינו כנגד הנקודה מכאן ומכאן כלה והולכת וצרה עד משהו. ואם באת לחזור ולחלק אותה באמצע היינו כנגד הנקודה תמצא שתי רצועות שכל אחת ארכה טפח ומחצה ומצד אחת רחבה חצי טפח ומצד אחר כלה עד משהו. ועתה תצטרף אלו שתי הרצועות ושים הארוך כנגד הקצר תמצא רצועה ארכה טפח ומחצה על רוחב חצי טפח. תחלוק אותה לשלש רצועות תמצא בה שלש רצועות מחצי טפח על חצי טפח ואילו רצועה מרובעת של טפח כשתחלקנה שתי וערב תמצא בה ארבע רצועות של חצי טפח על חצי טפח הרי לך מרובע יתר על העיגול רביע:



And if we wish to determine the exact amount by which a square is bigger than a circle, we will be able to prove it as follows. Take a point, and encircle it with many threads, one around another until you fill up a circle of 1x1. And then cut the threads downward, along the radius of the circle, and spread out the threads to the left and to the right. We find that each thread is longer than the previous thread on both sides, all the way to the topmost thread, which has length 3 (since it is the circumference of a circle of diameter 1). We find the threads arranged as follows, like a [triangular] strip whose width is $\frac{1}{2}$ and which tapers to a point in either direction.

If you now divide this in the middle (near the original center point), you will find two [triangular] strips, each of which is $1\frac{1}{2}$ long, and its width is $\frac{1}{2}$ at one end and tapers to a point at the other end. And now join these two together, putting the long side of one next to the short side of the other. You will find a [rectangular] strip with length $1\frac{1}{2}$ and width $\frac{1}{2}$. Divide it into three equal pieces, each of which is a square, $\frac{1}{2}$ by $\frac{1}{2}$. And if you divide a 1x1 square in quarters, you will find four square regions of $\frac{1}{2}$ by $\frac{1}{2}$. Thus, the area of the square exceeds the area of the circle by a quarter.

13. R. Matityahu haKohen Munk, "Three Geometrical Problems in the Bible and the Talmud," *Sinai* 51 (1962) 218-227.

We must now ask: Why is the sea described in Kings in such a way that seems to the reader to be so imprecise? Must one who reads the verse there think that the circumference of the sea was only thirty cubits and not realize that the prophet knew that its circumference was more than 31 cubits in reality, and that the figure thirty cubits was given only for *halacha*? Is there any sign in the verse of our precision? Let us look carefully at the above-mentioned verse, on which the figure of 3:1 is based. After it says "perfectly round," it mentions the height of the sea, and then adds: "And a line of thirty cubits encircled it all around." One may ask: Why doesn't it say, more briefly, "It was round, thirty cubits around" instead of the long version: "And a line of thirty cubits encircled it all around?" It seems to me that the author chose this long phrase because he wanted to add the word קו, which has both a pronounced (*k'ri*) and a written (*k'tiv*) form. The written form is וקוה, and the pronounced form is וקו. What can we learn from the pronounced and written forms? When we are speaking about numbers, we explain that the difference between the versions can be found in a numerical manner, in *gematria*. The *gematria* of וקוה (the conjunctive *vav* isn't part of the word) is 111. The *gematria* of קו is 106. A mathematical calculation of the circumference of the sea, based on a diameter of 10 cubits, equals $10 \times \pi = 31.4159265\dots$. If we use the estimate $3330/106$, we obtain a number that is closer to the correct number than the number obtained using $220/7$ as usual. The ratio $330/106 : 30$ is equal to the ratio $111 : 106$, the *gematria* values as above of וקוה and קו. The closeness is so surprising as to amaze.

If we compare $31.4159265 : 30 = 1.0471975$ to $111:106 = 1.0471698$, we see that the difference is smaller than three parts in 100,000, an extremely good estimate.

What did the prophet want to teach us with these written and pronounced forms? The written form serves as a sign of the exact value of the circumference, and the pronounced form teaches us what we need to know for *halacha*. The written form is what we see with our physical eyes, and therefore it is connected to the number that we find if

we measure the circumference. The pronounced value is what gives us knowledge for matters of *halacha*. If we explain the written form in this manner, we cannot say that the prophet did not give us the exact value of [the circumference of] the sea properly in his statement that “a line of thirty cubits encircled it all around.” Really, he is telling us the circumference in accordance with our reality, albeit only with a hint; his main intention was to teach us *halacha*.

One may ask: Why isn’t the word *וּקוּ* written with the same written and pronounced forms in the other verse as well (II Chronicles 4:2)? We would answer, that there is no need to repeat the sign of what is in accordance with our reality. And one may ask: Don’t we also find written and pronounced forms of *וּקוּ* in two other places in the Bible: “And the line will go straight out” (Jeremiah 31:38), and “The line is being applied to Jerusalem” (Zechariah 1:16)? We answer that we do not have to explain all written and pronounced forms in the same way.

14. Dante Alighieri (1265-1321), *Paradiso* 33.127–145 (trans. Allan Mandelbaum, 1984)

That circle—which, begotten so, appeared
in You as light reflected—when my eyes
had watched it with attention for some time,
within itself and colored like itself
to me seemed painted with our effigy,
so that my sight was set on it completely.
As the geometer intently seeks
to square the circle, but he cannot reach,
through thought on thought, the principle he needs,
so I searched that strange sight: I wished to see
the way in which our human effigy
suited the circle and found place in it—
and my own wings were far too weak for that.
But then my mind was struck by light that flashed
And, with this light, received what it had asked.
Here force failed my high fantasy; but my
Desire and will were moved already—like
a wheel revolving uniformly—by
the Love that moves the sun and the other stars.