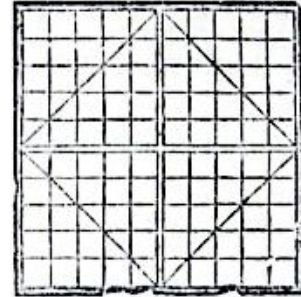


**Jewish Geometry**  
Adam Simon Levine  
NHC Summer Institute 2018

**Part II: Square Roots and the Pythagorean Theorem**

**1. Tosafot, Sukkah 8a**

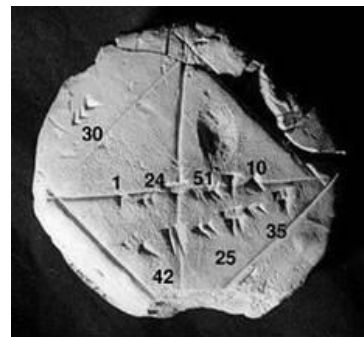
כל אמתא בריבוע אמתא ותרי חומשי באלכסונה. אין החשבון מכוון ולא דק דאיכא טפי פורתא שאם תעשה ריבוע של עשר על עשר ותחלק אותו שתי וערב נמצא בתוכו ארבעה ריבועים של חמשה על חמשה חזור וחלוק אותם ריבועים לאלכסונים ההולך לצד אמצע של ריבוע גדול תמצא בריבוע הפנימי חמשים אמה שהרי הוא חציו של חיצון שהרי חלקת הריבועים של ה' על ה' כל אחד לאלכסונו ואם לא היה בו אלא לפי חשבון אמתא ותרי חומשי דהיינו ז' על ז' נמצא דאין בו חציו של חיצון דריבוע של שבעה על שבעה אין בו אלא ארבעים ותשע רצועות של אמה על אמה וראוי להיות חמשים דהא הוא חציו של עשרה על עשרה דעולה למאה רצועות של אמה על אמה:



*Whatever is one cubit square has a diagonal of  $1 \frac{2}{5}$  cubits.* This figure is not exact, for it's a little more. If you make a square of ten by ten, and divide it in two and again, you will find in it four squares of five by five. Now divide each of those squares with the diagonals that connect midpoints of the sides of the large square. You will find in the inside square an area of fifty square cubits, since it's half of the outer one, since the 5 by 5 squares were split along their diagonals. But if the figure were only  $1 \frac{2}{5}$  cubits, it would be a 7 by 7 square, and this isn't half the area of the outer square. It's only 49 square cubits!

**2. Babylonian clay tablet YBC 7289 (ca. 1800–1600 BCE)**

From Wikipedia: The tablet depicts a square with its two diagonals. One side of the square is labeled with the sexagesimal number 30. The diagonal of the square is labeled with two sexagesimal numbers. The first of these two, 1;24,51,10 represents the number  $305470/216000 \approx 1.414213$ , an accurate numerical approximation of the square root of two. The second of the two numbers is  $42;25,35 = 42 \frac{307}{720} \approx 42.426$ , the result of multiplying 30 by the given approximation to the square root of two.



**3. Mishnat Hamidot 4:1**

שלוש מדות במשלשות ואלו הן: הנצבה החדה והפתוחה. איזו היא הנצבה? שני צדיה הקצורים מצורפים כל אחד בפני עצמו [קבועים זה עם זה. והצד הארוך שהוא הקבע מצורף בפני עצמו. הצרף האחרון] הוא שוה לראשון.

There are three types of triangles: right, acute, and obtuse. What is a right triangle? Its two short sides are multiplied into themselves [and added together. The long side, which is the base, is multiplied into itself. The last square] is equal to the first.

#### 4. Mishnah Eirubin 2:3,5

משנה ג רבי יהודה אומר, עד בית סאתים. אמרו לו, לא אמרו בית סאתים אלא לגנה ולקרפף, אבל אם הנה דיר או סחר, או מקצה או חצר, אפלו בית חמשת כורין, אפלו בית עשרה כורין, מתר. ומתר להרחיק כל שהוא, ובלבד שיכרה בפסין:  
 משנה ה ועוד אמר רבי יהודה בן בבא, הגנה וקרפף שהן שבעים אמה ושירים על שבעים אמה ושירים, מקפת גדר גבוה עשרה טפחים, מטלטלין בתוכה, ובלבד שיהא בה שומירה או בית דירה, או שתהא סמוכה לעיר. רבי יהודה אומר, אפלו אין בה אלא בור ושיח ומערה, מטלטלין בתוכה. רבי עקיבא אומר, אפלו אין בה אחת מכל אלו, מטלטלין בתוכה, ובלבד שיהא בה שבעים אמה ושירים על שבעים אמה ושירים. רבי אליעזר אומר, אם הנה ארפה יתר על רחבה אפלו אמה אחת, אין מטלטלין בתוכה. רבי יוסי אומר, אפלו ארפה פי שנים ברחבה, מטלטלין בתוכה:

*Mishnah 3.* R. Judah said: [One may move objects on Shabbat in an enclosure that is] as large as two *beit se'ah*. [One *beit se'ah* = 50 cubits by 50 cubits, the area that can be planted with one *se'ah* of grain.] The Sages said to him: [the limit of] two *beit se'ah* was prescribed for a garden or a storage area only; but if [the enclosure] was a cattlepen, a sheepfold, a backyard, or a courtyard, it may be [as big as] five or ten *beit kor*. [One *beit kor* = 30 *beit se'ah*.]

*Mishnah 5.* R. Judah b. Baba said further: it is permitted to move objects in a garden or a storage area that is seventy cubits and a fraction by seventy cubits and a fraction and is surrounded by a wall ten handbreadths high, provided it contains a watchman's hut or a dwelling place or it is adjacent to a town. R. Judah said: even if it contains only a cistern, a ditch, or a cave it is permitted to move objects within it. R. Akiba said: even if it contains none of these it is permitted to move objects within it, provided its area is no more than seventy cubits and a fraction by seventy cubits and a fraction. R. Eliezer said: if its length exceeds its breadth even by a single cubit it is not permitted to move any objects within it. R. Yose said: even if its length is twice its breadth it is permitted to move objects within it.

#### 5. Babylonian Talmud, Eirubin 23b

רבי עקיבא היינו תנא קמא! - איכא בינייהו דבר מועט. דתניא, רבי יהודה אומר: דבר מועט יש על שבעים אמה ושירים, ולא נתנו חכמים בו שיעור. וכמה שיעור סאתים - כחצר המשכן. מנא הני מילי? - אמר רב יהודה: דאמר קרא: ארך החצר מאה באמה ורחב חמשים בחמשים, אמרה תורה: טול חמשים וסבב חמשים. פשטיה דקרא במאי כתיב? - אמר אביי: העמד משכן על שפת חמשים, כדי שיהא חמשים אמה לפניו, ועשרים אמה לכל רוח ורוח.

It seems that R. Akiva agrees with the first Tanna [i.e., his dimension statement is superfluous]! Actually, there is a small difference between them, as it is taught: R. Judah said: There's a small difference [between two *beit se'ah* and a square of] 70 and a

fraction, but the Sages didn't state it precisely. And how much is two *beit se'ah*? Like the courtyard of the Temple. How do we know this? R. Judah said: As it says in Scripture (Exodus 27:18), "The length of the courtyard was 100, and the width was 50 by 50." The Torah is saying, take away 50 and surround them with 50. But what is the plain meaning? Abaye said: The Temple stood at the edge of 50, so that there were 50 cubits in front of it, and 20 in the remaining directions.

## 6. Jerusalem Talmud, Eiruvim 20b

רבי שמואל בר נחמן בשם רבי יונתן: מחצר המשכן למדו: אורך החצר מאה באמה ורוחב חמשים בחמשים. וחמשים זימנין מן מאה הא חמשה אלפין שובעין מן שובעין הא חמשה אלפין פרא מאת ותנינן שבעים ושריים. ותני שמואל אמה ושני שלישי אמה שנו. שובעין זימנין מן תרין תלתותין ושבעין זימנין מן תרין תלתותין דעבדין מאה וארבעים תלתותין מאה וארבעים תלתותין שהן תשעים ושלוש אמה ושליש. צא מהן ארבעה תשועין לארבע רוחות נשתייר שם תשעה עשר תלתולין חסר תשוע כהדא דתני. יש כאן דבר קל ולא יכלו חכמים לעמוד עליו קרפף שיש בו מידת סאתים.

R. Shmuel bar Nachman said in the name of R. Yonatan: From the dimensions of the Temple we learn: "The length of the courtyard was 100 cubits, and the width was 50 in/by 50." And 50 times 100 is 5000. 70 by 70 is 5000 less 100, so we learn: 70 and a fraction. Shmuel taught: 70  $\frac{2}{3}$  cubits is two small. 70 times  $\frac{2}{3}$  and 70 times  $\frac{2}{3}$  are  $\frac{140}{3}$  and  $\frac{140}{3}$ , which is  $93 \frac{1}{3}$ . Coming out are  $\frac{4}{9}$  on the four corners. What remains is  $\frac{19}{3}$  less  $\frac{1}{9}$ , as taught. This is a close approximation; the sages could not determine the exact dimensions of a [square] storage area whose area is two *beit se'ah*.

## 7. Rambam, Commentary on the Mishnah, Eiruvim 2:5

לפי שכבר נזכרו דברי ר' יהודה בן בבא הוסיף ואמר ועוד אמר ר' יהודה בן בבא. וכבר ביארנו שחצר המשכן הוא בית סאתים. וכבר ידעת שתשבורת חצר המשכן שהיא בית סאתים חמשת אלפים אמה, לפי שארכו מאה ורחבו חמשים, וכל מקום שתשבורת שטחו חמשת אלפים אמה הרי הוא בית סאתים איך שתהיה תבניתו עגול או מרובע או משולש או שאר תבניות. אבל שטח מרובע בעל זוויות ישרות שתשבורתו חמשת אלפים אמה אי אפשר לדעת צלע אותו השטח אלא בקירוב, לפי שחמשת אלפים הוא מספר שאין לו שורש, ושרשו בקירוב שבעים אמה וחמש שביעיות אמה, והענין במספר הזה כמו שביארתי לך למעלה ביחס קוטר העיגול להקיפו, לפי שגם הוא אי אפשר לעולם להגיע לידיעת שורש המספר "אלצם" שלו אלא בקירוב, ואין זה מחמת חסרונינו, אלא שטבע אותו מספר כך, ולפיכך אמרו שבעים אמה ושירים, לפי שאם תעשה את השירים האלו חמש שביעיות כמו שביארתי לך ותכפול שבעים אמה וחמש שביעיות בשבעים אמה וחמש שביעיות יהיו תוצאות המספר חמשת אלפים וחצי אחד בקירוב. ואם תעשה השירים שני שלישים כמו שנראה מן הירושלמי יהיה מדת אותו השטח ארבעת אלפים ותשע מאות ותשעים ושלושה ושבע תשיעיות, וזה הוא ההבדל שבין דברי ר' יהודה בן בבא שאמר שבעים ושירים על שבעים ושירים, ובין דברי ר' עקיבה שאמר ובלבד שתהא שבעים ושירים על שבעים ושירים נוסף על מחלוקת שביניהם בשומירה ובית דירה, שר' יהודה בן בבא מדקדק מאד בחשבון עד שיהא מדת המרובע בית סאתים שלמים לפיכך היה עושה השירים חמש שביעיות כמו שאמרנו או משהו יותר מדויק מזה. ור' עקיבה היה עושה החשבון בקירוב יותר, ועושה השירים שני שלישים או משהו קרוב לזה עד שיהא מדת המרובע קרוב לבית סאתים, וכך ייראה מדבריהם במקום אחר. ומה שאמר ר' יהודה אפילו אין בה אלא בור ושיח ומערה, כלומר אחד מהם בור או שיח או מערה.

We already explained that the Temple courtyard is two *beit se'ah*. And you know that the area of the Temple courtyard is 5000 square cubits, since its length is 100 and its width is 50, and any place whose area is 5000 square cubits is two *beit se'ah*, whether it's a circle or a square or a triangle or any other shape. But it is not possible to know the side a square with right angles whose area is 5000 square cubits exactly, since 5000 is a number that doesn't have a [rational] square root. Its root is approximately  $70 \frac{5}{7}$ , and the significance of this number is like I explained above about the relation of the diameter of a circle to its circumference ... and this isn't because of a lack of our knowledge, but the nature of this number. And therefore they said "70 and a fraction" (*shirayim*). If you make the fraction  $\frac{5}{7}$  like I said, and multiply  $70 \frac{5}{7}$  by  $50 \frac{5}{7}$ , you will get approximately  $5000 \frac{1}{2}$ . But if you make the fraction  $\frac{2}{3}$  like in the Yerushalmi, the area will be  $4993 \frac{7}{9}$ . This is the difference between R. Yehudah ben Bava, who said "70 and a fraction by 70 and a fraction," and R. Akiva, who said "only 70 and a fraction by 70 and a fraction," in addition to the presence of a hut or a booth. R. Yehuda ben Bava is very precise in computation, so that it should be two full *beit se'ah*, so he makes the fraction  $\frac{5}{7}$  like we said, or something more precise than that. R. Akiva gives a more approximate figure, and makes the fraction  $\frac{2}{3}$  or something close to that, so that the area is close to two *beit se'ah*, and thus is seen in their words elsewhere.

**8. R. Saadia Gaon (882-942), *Kitāb al mawārīth* (Laws of inheritance, trans. Solomon Gandz)**

[Background: Finding the diameter of a circle whose area is  $9 \text{ kab} = 1.5 \text{ se'ah} = 3500$  square cubits. The claim is that  $\sqrt{5000} \approx 70 \frac{43}{60}$ .]

If it is circular, we must add one-third to the measure of these 9 *Kab*, and therefore, also add one-third to the lot; thus the area which was originally 3750 becomes 5000. So that if you seek the measure of (the diameter of) the circular field, you will multiply  $70 + \frac{2}{3} + \frac{1}{2}$  of  $\frac{1}{20}$  by itself and find the true sum. Its explanation is as follows: 7 by 7 is 49; 7 by 70 is 490, 70 by 70 is 4900. There still remains  $\frac{2}{3} + \frac{1}{2}$  of  $\frac{1}{10}$ :  $\frac{2}{3}$  of 70 is  $46 \frac{2}{3}$ ;  $\frac{1}{2}$  of  $\frac{1}{10}$  of 70 is  $3 \frac{1}{2}$ ; together they are  $50 \frac{1}{6}$ ; double it, for it is multiplied by itself, and you get  $100 \frac{1}{3}$ . Throw away the one-third to the other fractions and 100 remains; add it to the above and you get 5000 conforming to the computation. Such is the procedure for the circular field.

**9. Deuteronomy 22:9**

לֹא־תִזְרַע פְּרִמָּה פְּרִמָּה כְּלֵאִים פְּרִי־תִקְדֹּשׁ הַמִּלְאָה הַזֶּרַע אֲשֶׁר תִּזְרַע וּתְבוֹאֵת הַכֶּרֶם:

You shall not sow your vineyard with a second kind of seed, else the crop—from the seed you have sown—and the yield of the vineyard may not be used.

**10. Mishnah Kilayim 5:5**

הנוטע ירק בפרם או מקים, הרי זה מקדש ארבעים וחמשה גפנים. אימתי, בזמן שהיו נטועות על ארבע ארבע, או על חמש חמש. היו נטועות על שש שש, או על שבע שבע, הרי זה מקדש שש עשרה אמה לכל רוח, עגלות ולא מרבעות:

If one plants or maintains vegetables in a vineyard, this prohibits 45 vines. When does this apply? When they are planted 4 by 4 or 5 by 5. If they were planted 6 by 6 or 7 by 7, it forbids 16 cubits in all directions, in a circle rather than a square.

### 11. Rash, Kilayim 5:5 (R. Shimshon b. R. Avraham of Sens, France, 1150-1216)

ד' על ד' או ה' על ה' - שיש בין גפן לגפן ד"א או ה' אז אוסר מ"ה גפנים שהרי כשיטע ז' שורות של גפנים שיש בכל שורה ושורה ז' גפנים וכל הגפנים מכוונות ד"א בין גפן לגפן תמצא מ"ט גפנים נטועין בתוך ריבוע של כ"ד אמות על כ"ד אמות דשורה של ז' גפנים יש בין הגפנים ו' אירים של ד' וכן לכל שורה ושורה. וכשזרע סביב גפן אמצעית של שורה רביעית דהיא גפן האמצעית של כל גפנים הרי זה מקדש ט"ז אמה עגולות לכל רוח כדקתני סיפא היינו ל"ב על ל"ב עגולות. ונמצאו כל המ"ט גפנים נטועות בתוכן חוץ מד' גפנים מד' זוויות משום דכל אמתא בריבועא אמתא ותרי חומשי באלכסונא. נמצא דריבוע של כ"ד אמות באלכסון עודף עליו ט' אמות וג' חומשין ונמצאו הזוויות נטועות חוץ לל"ב.

4 by 4 or 5 by 5 – If one vine to another is 4 or 5 cubits, then 45 vines are forbidden. For if one plants 7 rows of vines, with 7 vines in each row, spaced 4 cubits apart, you will have 49 vines in a square 24 by 24 cubits, since there are 6 gaps of 4 between each row. And if one plants [vegetables] around the middle vine of the fourth row — i.e., the middle vine of all the vines — it forbids 16 cubits in all directions, as taught in the second half, i.e. a circle 32 cubits in diameter. All 49 vines are inside this circle except the four corner ones, for “a square of a cubit is a cubit and two fifths in diagonal.” We find that a square of 24 has a diagonal that is 9.6 cubits greater [i.e. 33.6 cubits], so the corners are outside the 32.

וכן כשיש נמי ה"א בין גפן לגפן אוסר כמו כן מ"ה גפנים, שהרי אורך השורה לו' אירים ל' אמה וכשתסיר שבזוויות אין אחת מהן רחוקה מן האמצעית יותר מ"ו אמה שהרי לכל זווית וזווית ה' על ה' ותמצא שאין מגפן הזרועה עד גפן הרחוקה אלא כשעור חצי האלכסון שלשים על עשרים. וקל הדבר לעשות ציור ולהבין. ואלכסון של שלשים על עשרים אינו מעדיף על הריבוע אפילו כעודף האלכסון של כ' על כ' [ויורר י']. תדע דאם תקשור חוט שבקרון זווית ותולכנו באלכסון לסוף כ' ואח"כ ביושר עד למטה י' אמות נמצא אורך החוט ל"ח אמות, שהעדיף ח' אמות משום אלכסון של כ' על כ'. ואם באת למותחן באלכסון מקרן לקרן דבר הנראה לעינים שמתקצר הרבה. ודלא כרבינו שמואל שפירש בסוף המוכר פירות דאלכסון של ד' על ד' אינו מעדיף כדפרישנו ואין אדם יכול לעמוד לעשות כלל וקצבה לאלכסון של ריבוע שארכו יותר על רחבו. ומתוך משנתנו יש לדקדק דאלכסון של ל' על כ' אינו מעדיף כי אם ב' אמות דהוה ליה ט"ז אמה לאמצעית.

And likewise when the vines are spaced 5 cubits apart, it forbids 45 vines. For the length of the row, with 6 spaces, is 30 cubits. Apart from the corners, not one of the vines is more than 16 cubits from the middle. For each corner is 5 apart, and you find that from the center vine to the farthest vine is only half the diagonal of a 30x20 rectangle. And it is easy to make a picture and to understand. The diagonal of a 30x20 rectangle exceeds the [longer side] by no more than the diagonal of a 20x20 square exceeds [the side]. For if

you tie a thread on the corner and bring it on the diagonal [of a 20x20 square], and then straight down 10 cubits, we find the length of the thread is 38 cubits, for the diagonal of 20x20 exceeds the width by 8. And if you stretch it diagonally from one corner to the other, it is totally clear that it shortens greatly. . . . And from our Mishna, we can conclude that the diagonal of 30x20 does not exceed the width by more than 2 cubits [i.e. isn't greater than 32], for the distance [from the vine next to the corner] to the middle vine is 16 cubits.

ובני אדם חכמי המדות אמרו דכל מרובע ב' קוים במרובע האלכסון, שמודדין מדת רחבו ועושין מרובע כמדתו ומודדין מדת ארכו ועושין ריבוע כמדתו ומודדין מדת אלכסון ועושין ריבוע כמדתו יעלה אלכסונו כשיעור אותן ב' ריבועין אחד שעשו למדת ארכו ואחד שעשו למדת רחבו. תדע עשה לך ריבוע של מאה על מאה וחלוק אותו לאמצעי שתי וערב יהיו לך ד' ריבועים שיש בכל אחד ואחד נ' על נ' חזור וחלוק אותם ריבועים לאלכסונים. הנה עיניך רואות דריבוע פנימי חציו של חיצון כזה /במקור יש ציור/ שהרי חילקת כל הריבועין של נ' על נ' לאלכסון והוא חציו של כל אחד ואחד. ואותו ריבוע של נ' על נ' מרובע שני קוים עולה ב' פעמים נ' על נ'. וכן עולה מרובע באלכסונו כאשר הראיתך בעיניך דריבוע פנימי חציו של חיצון היינו ק' על נ' דהיינו ב' פעמים נ' על נ'.

People who are wise in geometry have said that the sum of the squares of the two sides equals the square of the diagonal. That is, you measure the width and make a square of that size, and you measure the length and make a square of that size, and you measure the diagonal and make a square of that size. Then the area of the diagonal equals the area of the other two squares. To see this, make a square of 100x100, and divide it into four squares of 50x50, and then divide each of them diagonally. Your eyes will see that the inner square has half the area [of the outer square], for we've divided each of the 50x50 squares in half. Thus, the squares of the two sides are twice 50x50. And this also the square of the diagonal, as I showed you, since the inner square is half of the outer one, or 100x50, which is twice 50x50.

עוד אבינך בדרך אחרת ב' ריבועים של נ' על נ' חלוק כל אחד לשנים באלכסון וחזור וקח אותן ד' חתיכות והפוך אלכסונן לצד חוץ ד' אלכסונין לד' רוחות תמצא לך ריבוע ארכו כרחבו מאלו ב' ריבועים של נ' על נ' שחילקת לאלכסונן כזה /במקור יש ציור/. אך קשה שהרי אמרו חכמים בעירובין (דף כג ב) גבי חצר המשכן שהוא ק' על נ' טול חמשים וסבב חמשים ועולה לדבר מועט שיש שבעים אמה ושירים כמו שהוכיח שם בקונטרס ולפי חשבון זה לא יעלה אותו ריבוע כי אם ע' על ע' מצומצמין דכל אמתא בריבוע אמתא ותרי חומשי באלכסונא נמצא האלכסון של נ' על נ' שבעים אמה בצמצום. אבל דבר זה תלוי מה שאין כן בחשבון שכל אמתא בריבועא אמתא ותרי חומשי באלכסונא מכוון ממש. כאשר תראינה עיניך באותם ב' ריבועים זה מלפנים מזה דלפי חשבון של אמתא ותרי חומשי הוי פנימי ע' על ע' ועל כרחק אלכסון של פנימי הוא מאה כמדת רוחב ריבוע החיצון ולפי חשבון של אמתא ותרי חומשי אין עולה אלכסון של שבעים כי אם צ"ח אמות ולא חשו חכמים על אותו מעט ומתקיימין דברי חכמים ודברי חכמי המדות.

I'll show you another way also. Two squares of 50x50 can be split on their diagonals, and then you put these four triangles together with their diagonals on the outside. You've made a square out of these two squares of 50x50, divided along its diagonals. But it is a problem, for the sages said in Eirubin (23b) that the Temple courtyard was 100x50, which is the same area as 70 and a fraction. According to this computation, this square is only 70x70 reduced, for a one cubit square is one and two fifths cubits in diagonal, so the diagonal of 50x50 is only 70. But this depends on

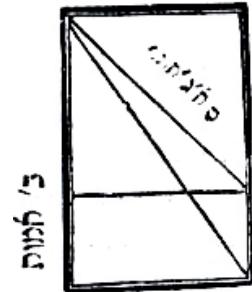
something that doesn't add up exactly: the statement that a one cubit square is one and two fifths cubits in diagonal. As you can see, with these two squares, one inside the other, using the figure of one and two fifths, the inner one is 70x70. Its diagonal is 100 since it's the width of the outer square, but it's only 98 by computation. The sages were not concerned with such small amounts, so both the words of the sages and the words of the geometers are valid.

ואע"פ שהוכחתי הדבר לריבוע שארכו כרחבו אין לו הוכחה לריבוע שארכו יותר על רחבו ועל כרחין ליתא להאיא כללא דהא אלכסון של ל' על כ' אין עולה כי אם ל"ב כדמוכחא מתני' כדפרישית ואם תעשה ריבוע של ל' ושתים על ל' ושתים חסר טובא שאינו עולה ב' ריבועין אחד של ל' על ל' ואחד של כ' על כ':

And even though I've proven this for a square whose sides are equal, it can't be proved for a rectangle whose length is greater than its width, and therefore, there is nothing to it. For the diagonal of 30 by 20 is less than 32, as our Mishnah shows. And if you make a square of 32 by 32, it's too small; it's not the size of two squares, one 30 by 30 and one 20 by 20.

## 12. Tosafot, Bava Batra 102a

וכגון שבדק באלכסונו. פ"ה דאלכסון ד' על ו' הן ב' [אמות] כאלכסון של ה' על ה' ולא יתכן שהרי בד' על ו' תן החוט באלכסון של ד' על ד' כזה יהיה לו ד' אמות וח' חומשין ועוד נשאר צד למטה ב' אמות ובין הכל לא יהא החוט ארוך אלא ז' אמות. ושלשה חומשים. וכל שכן אם ילך החוט ביושר באלכסון מארבע על ו' שיהא פחות. ועוד על כרחך אלכסון של ה' על ה' גדול יותר דהא בה' על ה' יש כ"ה אמות ובארבע על ו' יש כ"ד:



The diagonal of a 4x6 rectangle is at most 2 cubits [larger than the length], close to the diagonal of a 5x5 square. For in a 4 by 6 rectangle, stretch the thread on the diagonal of a 4x4 square, which is 5 3/5 cubits. There are still 2 cubits left below, so in all it's 7 3/5 cubits. All the more so, if the thread goes straight along the diagonal of the 4x6 rectangle, it will be less than this. And the diagonal of a 5x5 square is even greater, since the area of the 5x5 square is 25 while the area of the 4x6 rectangle is 24.

## 13. Rosh, Kilayim 5:5 (R. Asher ben Yechiel, 1250–1327)

כן כשיש חמשה אמות בין גפן לגפן מקדש מ"ה גפנים. פירש רבינו שמשון שאין מגפן האמצעית עד הגפן שאצל הקרן יותר משש עשרה אמה הילכך מקדש מ"ה כאילו היו נטועות על ד' ד'. ודבר זה נראה לעינים שאינו כן שהרי מגפן אמצעית עד הגפן שבקרן יש ט"ו אמה וחצי אלכסון של ל' על ל' שהוא שש אמות שהם כ"א אמה, ואם אין מגפן אמצעית עד גפן שאצל הקרן אלא י"ו אמה נמצא כשתמתח חוט של כ"א אמה מגפן אמצעית עד גפן שאצל הקרן ואח"כ תמתח החוט מאותו הגפן יגיע עד גפן שבקרן שאין ביניהם אלא ה' אמות וכן נשאר מן החוט, הילכך ע"כ יש ביניהם יותר מ"ו אמה, ולפי חשבון חכמי המדות דכל מרובע שני קוים כמרובע אלכסונו, ואמתי הוא אפילו בריבוע שארכו יותר על רחבו כאשר אצייר לך /במקור יש שרטוט/, יש מגפן האמצעית עד גפן שאצל הכרם י"ח אמות.

If there are 5 cubits from vine to vine, it sanctifies 45 vines. Rabbeinu Shimshon explained that from the middle vine to the vine next to the corner is no more than 16 cubits, and therefore it forbids 45, just as if they were spaced 4 cubits apart. But this is obviously incorrect. From the middle vine to the vine on the side is 15 cubits, and half the diagonal of a 30 by 30 square is 21 cubits. If from the middle vine to the vine next to the corner is only 16 cubits, when you stretch a thread of 21 cubits from the middle vine to the vine next to the corner, and then stretch the thread from this vine, you arrive at the vine in the corner with remaining thread, since they're only 5 cubits apart. Thus it's more than 16 cubits between them. According to the theorem of the geometers that the sum of the squares of the sides equals the square of the diagonal, which is true even for a rectangle whose length is greater than its width as I will illustrate for you [in a figure], from the middle vine to the one next to the corner vine is 18 cubits.

והרמב"ם ז"ל פירש דלהכי מקדש אותן גפנים הסמוכים לגפני הזויות אע"פ שהם רחוקים יותר מ"ו אמה מגפן האמצעי, לפי שאנו רואין י"ו אמה עגולות שסביב גפן האמצעי כאילו הם מלאות ירק, ואותו עגול הוא ל"ב על ל"ב ויוצא מז' שורות של ה' ה' אמה אחת מכל צד, שהרי ו' אוריים שבין ז' שורות של ה' ה' הם ל' אמה ואלכסון העיגול ל"ב אמות, נמצא יוצא העגול מז' שורות של ה' ה' אמה אחת לכל צד ונכנס לתוך שורה שמינית ותשיעית אמה אחת, ונמצא שנכנס עד עבודת הכרם של שורה שמינית ותשיעית אמה, הילכך צריך להוסיף על העגול ד' אמות מכל צד עד שיהיה בעגול אלכסון של מ' על מ', דכיון שאנו רואין העגול של ל"ב כאילו הוא מלא ירק בכל מקום שהוא מגיע לעבודת הגפן הוא אוסר. הילכך אוסר ה' גפנים הסמוכים לגפני הזויות אע"פ שהן רחוקים יותר מ"ו אמות מגפן האמצעי:

Rambam explained that it ruins the vines next to the corner vines even though they are more than 16 cubits away from the middle vine, because we view the 16 cubits around the middle vine as if they were filled with vegetables, and this circle is 32 in diameter and sticks out of the 7 rows of 5 cubits by one cubit on each side, since there are 6 gaps between 7 rows, each 5 wide, and thus it's a 30 by 30 square. The diagonal is 32 cubits, so the circle sticks out of the 7 rows by one cubit, and thus comes up to the tending region of the eighth and ninth rows. Therefore, we must add to the circle 4 cubits in every direction, so it's a circle of 40, since we view the circle of 32 as if it were filled with vegetables everywhere. Wherever it enters the tending region, it ruins. Therefore, we forbid the 8 vines next to the corners, even though they are more than 16 cubits from the middle vine.

#### 14. Rambam, Mishneh Torah, Hilchot Kilayim 6:1-2

הזורע ירק או תבואה בכרם או המקימו עד שהוסיף במאתים הרי זה מקדש מן הגפנים שסביבותיו שש עשרה אמה לכל רוח. עגלות ולא מרבעות. ורואין כל העגול שרחבו שתיים ושלשים אמה כאלו הוא כולו מלא ירק. וכל גפן שתהיה בתוך עגול זה נתקדשה עם הירק וכל שחוץ לעגול אינן מתקדשות: במה דברים אמורים כשהיה בין שפתי העגול הוזה ובין שורות הגפנים שחוצה לו יותר על ארבע אמות. אבל אם היה ביניהם ארבע אמות מצמצמות או פחות רואין את העגול כאלו הגיע לשורה הסמוכה לו וכאלו רחב העגול ארבעים אמה ורואין כל גפן שתפל בתוך עגול זה של ארבעים אמה הרי היא מתקדשת:

If one sows a vegetable or grain in a vineyard, or allows it to grow, it forbids the vines around it within 16 cubits in all directions, in a circle rather than a square. And we



view this circle (whose diameter is 32 cubits) as if it were completely full of vegetables. And any vine that lies within this circle is forbidden, and any vine that is outside the circle is not forbidden.

When does this apply? When the distance from the edge of the circle to the next row of vines outside it is more than four cubits. But if the distance between them is four cubits or less, we view the circle as if it stretched to the next row and is as if its diameter were 40 cubits, and any vine that falls within this circle becomes forbidden.

### 15. Kesef Mishneh, Hilchot Kilayim 6:2 (R. Joseph Caro, 1488-1575)

ומצאתי כתוב ששאל הרא"ש את ה"ר ישראל שהיה חכם בחכמות על דברי מי יש לסמוך והשיב לו כלשון הזה. אדוני ומרי תרב גדולתך כגודל כשרון פעולתך. עיינתי בפירוש משנת הנוטע ירק בכרם להר"מ ז"ל וראיתי כי הפליא עצה. הגדיל תושיה בפירושה אבל נראה לי לפי עניות דעתי כי האריך בה הרבה והלשון אינו מחזור כפי הצורך כי נראה סתירה בדבריו למי שאינו מעיין בהם עיון דק. אבל כלם נכוחים למבין. והענין אין לנטות ממנו ימין ושמאל. והנה פירשתים לפי דעתו ולא חדשתי בה כלום מלבי אלא קיצור הלשון ותיקונו... זהו מה שהבנתי מפירוש משנה זו מדברי רמז"ל והן הן הדברים שנאמרו למשה בסיני. ואל יתפתה אדוני ומורי במ"ש רבינו שמשון ז"ל בפירוש משנה זו ואל תשגיח עליו כלל כי חוץ מכבודו הוא שבוש נטוי על קו תוהו ואבני בוהו לא זה הדרך ולא זו העיר. ומה שכתב בשם חכמי המדות הוא אמת. ומ"ש ז"ל כי ברבוע שארכו יותר על רחבו אין על דבריהם הוכחה. יש ויש. ומה שכתב ליתיה להאי כללא, איתיה על כל פנים. ויהי כנהר שלומך ויעמוד לעד זרעך ושמך, כחפצך וכחפץ צעיר תלמידך נוגה חסדיך, ישראל בר יוסף נ"ע:

I have found a letter in which Rosh asked R. Yisrael b. Yosef, who was very knowledgeable (*chacham b'chochmot*), who is correct in this matter (Rambam or R. Shimshon). R. Yisrael writes: "My lord, my master, may your prestige be magnified like your talent and ability. I consulted Rambam's (z"l) commentary on the Mishnah, and I saw that that is knowledge is extraordinary. His explanation provides excellent guidance, but it seems, because of my lack of knowledge, that he elaborates too much and the language is not clear and would be confusing to someone who doesn't study it carefully. But it all makes perfect sense. One may not stray left or right from his approach. Thus, I will explain the entire argument and not add anything, save for simplifying the language..."

"This is what I have understood from the Rambam's (z"l) explanation of this Mishna, and it is *Torah l'Moshe b'Sinai*. But let not my lord be seduced by R. Shimshon's (z"l) explanation of this Mishnah, and do not pay attention to it at all, for it is beyond his honor, a disgrace founded on a vacuous line [of thought] and a nonsensical foundation. What the geometers have written is correct. His claim that [the Pythagorean theorem] cannot be proven for a rectangle whose length is greater than its width is incorrect — it can! His words have no merit. May your peace be like a river and endure for your offspring and your name, according to your will and the will of your young student touched by your mercy. Yisrael bar Yosef."

## 16. Tosafot Yom Tov, Kilayim 5:5 (R. Yom Tov Lipmann Heller, 1578–1654)

ואנחנו לא נדע מה נעשה. ואל מי מקדושים נפנה בפירוש משנתנו אחרי שדברי כל המפרשים זכר כולם לחיי העולם הבא אין באחד מהם מה שמספיק שתנוח דעת כל משכיל עליו. כי דברי הר"ש דחויין מעיקרן. ודברי הרמב"ם גם המה לא יתכנו בפירוש המשנה כאשר הוכחנו. וכאשר נראה מדברי חבורו שהוצרך לשנות הלשון והמליצה מפני הקושי אשר הרגיש בעצמו מה שיפול במשנתנו לפי דרכו. וגם דברי הראב"ד אינם מתיישבים כלל ואינם עולים בפ"י המשנה ובעל כסף משנה לא הטריח עצמו בענין משנתנו לא מינה ולא מקצתה:

“And we do not know what to do.” To which of the holy scholars shall we turn in understanding this Mishnah? For among all the writings of the commentators, may they be granted eternal life in the World to Come, there is nothing which we can actually rely on. The words of Rabbeinu Shimshon are utter nonsense, and the words of Rambam do not fully explain the Mishnah, as we have shown. And it is clear from his essay that one has to keep changing the language and the phrasing to account for every single objection. Likewise, the words of the Raavad don't make any sense and don't explain the Mishnah, and the author of the Kesef Mishnah didn't get a single thing right.

אולם לפי מה שכתבתי אני בפירוש הקצר שהקדמתי בו לפרש המשנה. ונתתי טוב טעם לקידוש מ"ה גפנים בנטוע על ה' ה' שהוא מגזירת החכמים גזירה משום סתם כרם שהן נטועות מן הסתם בעל ד' ד'. והרואין כרם שהוא נטוע על ה' ה' ויהיה ירק נטוע באמצעו ולא יקדש מ"ה גפנים רק ל"ז ולא ירגישו במה שהוא אינו נטוע כסתם כרם כי לא יבדל במעט הבדל כזה שבין ד' ד' לה' ה'. אבל יהיו סוברים שהוא סתם כרם ולא יקדישו בכל סתם כרם כי אם במספר גפנים הללו שהיו ל"ז. ולפיכך אמרו בנטוע על ה' ה' שיהא דינו כסתם כרם שהוא נטוע על ד' ד'. אבל בנטוע על ו' ו' שיש כאן הבדל רב שהרי מרחק כל שורה משורה הוא יותר במחצית הרחקת כל שורה משורה בסתם הכרמים ובזה אין לטעות דכולי עלמא ידעי שאין זה כסתם כרם ושמפני הרחקת שורותיו אינו מקדש כל כך וליכא למגזר. וכל הדוחקים שיהיו בין לפירוש הרמב"ם בין לפירוש הראב"ד ליתנהו והיו כלא היו לפי פירוש זה וגם טעם מספיק למה חלקם המשנה בשני דמיון וקצב בדמיון הראשון מ"ה גפנים ובדמיון השני מדת המקודש ט"ז אמה. וכן ניחא ששונה ד' ד' עם ה' ה' לומר לנו שזהו טעם דמחמירים בה' ה' ומקדשים עד מ"ה גפנים משום גזירה דנטוע על ד' ד' הוא:

Rather, there is a clear explanation for why 45 vines are forbidden in the 5x5 case: it is a stringency imposed by the Sages because an ordinary vineyard is planted 4x4. If one were to see a vineyard planted 5x5, with a vegetable planted in the middle that doesn't forbid 45 vines but rather 37, one might not be aware that it wasn't an ordinary vineyard, since the difference between 4x4 and 5x5 is small. One might conclude that it was an ordinary vineyard, and that in an ordinary vineyard a vegetable only forbids 37 vines. Therefore, the sages said that in a 5x5 vineyard, the rule should be the same as in an ordinary 4x4 vineyard. But in a 6x6 vineyard, for which there's a big difference (the spacing between rows is 50% bigger than in an ordinary vineyard), there is no risk of confusion, since everyone knows that this isn't an ordinary vineyard, and there is no need to impose an extra stringency. And all of the complicated cases considered by Rambam and Raavad are not necessary. And we have a simple explanation for why the Mishnah is given in two separate statements, specifying 45 vines in the first and 16 cubits in the second: the rule in the 5x5 case is made more stringent because of the 4x4 case.

## 17. Netzach Yisrael (R. Israel ben Moses Segal of Zamość, c. 1700–1772)

We have stated that the count in the 4x4 case is 45 and no more. But now let us assume that the vegetable is planted in the space between the vines. We find that there are 52 vines inside the circle! For there are eight rows of vines which enter the circle, with seven gaps of 4 cubits, making 28 cubits, and the circle protrudes by 2 cubits on all sides. And all the vines in these 8 rows fall within the circle, except for the three on each corner, for a total of 52 vines... And since the Mishnah says that only 45 vines are prohibited, even in the 4x4 case, we are forced to conclude that the Mishnah specifically assumes that the vegetable is planted at the central vine. This is also clear from the language of the Yerushalmi, which says that the vegetable is planted at the central vine, and from the Tosafot Yom Tov...

This must also hold in the the 6x6 case. We have explained that the Mishnah specifically deals with the case that the vegetable is planted around the middle vine. If so, there are only 21 vines, not 24 as Rambam thought! ... And this is just like in the 7x7 case, where the number of prohibited vines is also 21. Why, then, does the Mishnah include the count of 45 vines in the 4x4 and 5x5 cases, but not in the 6x6 and 7x7 cases, in both of which it's 21 vines? Why did it just state the 16-cubit rule in the 6x6 and 7x7 cases, if the counts are the same for both? This is a serious challenge for all the commentaries and all the opinions, but especially for Rambam, who stated that the count in the 6x6 case is 24 (since he assumed that the vegetable is in the middle space) but that it's only 45 in the 4x4 case (which requires the vegetable to be at the middle vine).

And now, all those who are interested in these matters, give ear to my words, and you will find comfort for your soul in the resolution of the confusion raised above. In the first chapter of Tractate Eiruvin, it says: "Abaye said in the name of Rav Nachman: The cubit of the sukkah and the cubit of the alleyway are a cubit of 5 [handbreadths], and the cubit of kilayim is a cubit of 6 [handbreadths]." And Rashi wrote about this: "Since it says this is big and this is small, we deduce this is strict and this is strict." That is, what Abaye is saying is not really that the laws of the sukkah and the alleyway require a cubit of 5 and Kilayim uses a cubit of 6, but rather that in both settings, whenever using a 5-handbreadth cubit produces a stricter outcome, we use a cubit of 5, and whenever using a cubit of 6 produces a stricter outcome, we use a cubit of 6...

And now we can finally explain the meaning of our Mishnah. The cubits used for stating the distance from the vegetable are cubits of 6 handbreadths, since that produces the stricter outcome, while the cubits used for stating the distances between the rows are cubits of five handbreadths. And now we can truly understand the Mishnah's ruling that in the 5x5 case, the vegetable prohibits 45 vines. The distance from the central vine to the vine by the corner is now the diagonal of 10 by 15 cubits, which is just about 18 cubits of 5 [Note:  $\sqrt{10^2 + 15^2} = 18.027 \dots$ ], which is 90 handbreadths, which is 15 cubits of 6! Thus, they fall within the circle and are prohibited. But the four corners vines are at a distance of the diagonal of 15 by 15, which is about 21 [ $\sqrt{15^2 + 15^2} = 21.213 \dots$ ] which must be outside the circle [since it's about 17.7 cubits of 6].

But we must now ask: If we assume that the distance from the vegetable is measured in cubits of 6, and the distances between the rows are measured in cubits of 5, what would happen in the 4x4 case? We would end up with more than 45 vines

prohibited! For the four vines in the corners are now are only about 17 cubits [ $\sqrt{12^2 + 12^2} = 16.97 \dots$ ] from the center in cubits of 5, and in cubits of 6 they are inside the circle [since it's about 14.1 cubits of 6].

The answer comes from analyzing the principle of ruling toward stringency. We sometimes measure with cubits of 5 and sometimes with cubits of 6 because we are unsure of which to use. But we know [from earlier in Kilayim] that a vineyard planted with spacing of less than 4x4 is not a vineyard, according to Rav Shimon. The meaning of "not a vineyard" is that it's permissible to sow it with seeds... Therefore, in the vineyard planted 4x4, the vegetable cannot prohibit more than 45 vines by process of elimination [ממה נפשך]. If the sages were working in cubits of 5 [for the radius], the vegetable would only forbid 16 cubits around it, in cubits of 5. And if they were working in cubits of 6, the vineyard would be planted in rows of less than 4 cubits, and therefore the vegetable would not forbid anything at all!

And now we can resolve the final issue: When the vineyard is planted 6x6, it no longer forbids 21 vines, just as in the 7x7 case. In the 6x6 case, the four vines in the corners are only about 17 cubits [of 5] away, and when we convert to cubits of 6, they enter into the circle of 16 cubits. But in the 7x7 case, the four vines in the corners are about 20 cubits [of 5] away, and even when we convert to cubits of 6, they are still outside the circle. We thus deduce that in the 6x6 cases, 25 vines are forbidden, and in the 7x7 case, 21 are forbidden. And we have now correctly interpreted the Mishnah.